Plan du cours

1. **Introduction + Calcul différentiel**
2. **Exercices de Calcul différentiel (3h de TD)**
3. **Théorie générale des ED :** $x'(t) = f(x(t))$
4. **Cas linéaire autonome :** $x'(t) = Ax(t)$
5. $\boxed{\textbf{Linéarisation \& ED linéaires non autonomes}}$

   $\delta x' = Df(x(t)) \cdot \delta x$ **&** $x'(t) = A(t)x(t)$
6. **Équilibres et stabilité,**

   $x' = f(x)$ **vs** $\delta x' = Df(x_0) \cdot \delta x$

Plan de la séance

1. Linéarisation du flot
2. Équations linéaires (non autonomes)
3. Conséquences
   - Différentielle du flot
   - Équations affines
   - Cas des ED linéaires périodiques

Rappels sur le flot

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad f \quad C^1 \text{ sur } \Omega \qquad (ED)$$

Flot = application $\phi_t : v \longmapsto x_v(t)$,

où $x_v(\cdot)$ = sol. maximale de (ED) t.q. $x_v(0) = v$.

Ex (cas linéaire) : Si $f(x) = Ax$, $\phi_t = e^{tA}$

Proposition

Supposons $x_v(\cdot)$ définie sur $[0, t]$ $(\Leftrightarrow t \in J_v)$.

Alors ϕ_t définie sur $\mathcal{V} \subset \Omega$ voisinage de v, et

$$\phi_t : \mathcal{V} \longrightarrow \phi_t(\mathcal{V}) \quad (= \text{voisinage de } x_v(t))$$

est une bijection continue.

Autrement dit, $v \mapsto x_v(\cdot)$ est continue sur $\mathcal{V}$.

[dépendance continue / cond. initiales]

Linéarisation du flot

Déf : **L'équation linéarisée** autour d'une sol. $x(\cdot) : J \to \mathbb{R}^n$ est

$$y'(t) = Df(x(t)) \cdot y(t), \qquad t \in J$$

Théorème

ϕ_t de classe C^1 et $D\phi_t(v) \cdot \delta v = y(t)$, où $y(\cdot)$ solution de

$$\begin{cases} y'(s) = Df(x_v(s)) \cdot y(s) \\ y(0) = \delta v \end{cases}$$

Autrement dit, $v \mapsto x_v(\cdot)$ est **différentiable** sur $\mathcal{V}$

[dépendance différentiable / cond. initiales]

Remarque : Forme de l'équation linéarisée :

$$y'(t) = A(t)y(t) \qquad \text{où} \qquad A(t) = Df(x(t))$$

$\to$ ED linéaire non autonome

Plan de la séance

Existence et unicité

$$x'(t) = A(t)x(t), \qquad t \in J \qquad (ED)$$

Données :
- J intervalle de $\mathbb{R}$,
- $A : J \to M_n(\mathbb{R})$ de classe C^k,

Solution : $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable t.q.
- I sous-intervalle de J
- $\forall t \in I, \quad x'(t) = A(t)x(t)$.

Théorème (Existence et unicité globales)

Soient $t_0 \in J$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
*Il existe une **unique** solution $x(\cdot)$ de (ED) t.q. $x(t_0) = x_0$.*
Cette solution est définie sur tout l'intervalle J.

ED linéaires

$$x'(t) = A(t)x(t), \qquad t \in J \qquad (ED)$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de (ED).

Proposition

$\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension n.

- Déf : **Résolvante** $=$ application linéaire

$$R_A(t,s) : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x_0 & \longmapsto & x(t), \quad \text{où } x(\cdot) \text{ solution de } (ED) \text{ t.q. } x(s) = x_0. \end{array}$$

$\longrightarrow \quad R_A(t,s)$ matrice $(n \times n)$ inversible.

- Solution générale de (ED) : $\quad x(t) = R_A(t,t_0)\, x(t_0)$

Propriétés de la résolvante

- $\forall\, t_0 \in J,\ \ R_A(\cdot, t_0) \ = $ **la** solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0) &= A(t)\, R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) &= I \end{cases} ;$$

- si $A(\cdot)$ est C^k, alors $t \mapsto R_A(t, t_0)$ est C^{k+1}.
- $\forall\, t_0, t_1, t_2 \in J$,

$$R_A(t_2, t_0) = R_A(t_2, t_1) \circ R_A(t_1, t_0);$$

Exemple : cas autonome

Si $A(t) \equiv A, \qquad R_A(t, s) = e^{(t-s)A}.$

$\boxed{\textbf{Moralité}}$

Il suffit de connaître $R_A(t, s)$

Problème : en général, on ne sait pas la calculer

MAIS on peut dire beaucoup de choses **qualitativement**

Exemples

- $\mathrm{tr}\, A(t) \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \det R_A(t, s) \equiv 1,$

  car $\qquad \det R_A(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(u)\, du \right) \qquad$ (voir TD).

  $\longrightarrow \ R_A(t, s)$ préserve le volume

- $A(t)$ antisymétrique (pour tout t)

  $\Longrightarrow \qquad R_A(t, s) =$ rotation (pour tous t, s)

  $\longrightarrow \ \|x(t)\|$ constant

Attention :

en général, les valeurs propres de $A(t)$ ne donnent

AUCUNE indication sur les solutions

Plan de la séance

Différentielle du flot

- Rappel : $D\phi_t(v) \cdot \delta v = y(t)$, où $y(\cdot)$ solution de

$$\begin{cases} y'(s) = Df\,(x_v(s)) \cdot y(s) \\ y(0) = \delta v \end{cases}$$

- Conséquence : Soit $R(t,s)$ = résolvante de l'ED linéarisée

$$y'(t) = A(t)y(t) \qquad \text{où} \qquad A(t) = Df\,(x_v(t))$$

Alors $\boxed{D\phi_t(v) = R(t,0)}$

Exemple d'application : Champs à divergence nulle

- $\operatorname{div} f(x) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{tr} Df(x)$

$$\operatorname{div} f(x) \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \det D\phi_t(x) = \det R(t,0) = 1$$

- Soit Γ domaine de $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{vol}(\Gamma) = \int_\Gamma d\mu$.

  Transport de Γ par (ED) $=$ $\phi_t(\Gamma)$,

$$\operatorname{vol}(\phi_t(\Gamma)) = \int_{\phi_t(\Gamma)} d\mu = \int_\Gamma |\det D\phi_t(x)|\, d\mu.$$

$$\operatorname{div} f(x) \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{vol}(\phi_t(\Gamma)) = \operatorname{vol}(\Gamma).$$

ED affines

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad\qquad (ED)$$

Théorème (Variation de la constante)

Toute solution de (ED) satisfait

$$\boxed{x(t) = R_A(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)\,b(s)ds.}$$

où $R_A(t,t_0)$ résolvante de $x'(t) = A(t)x(t)$.

Preuve. Poser $y(t) = R_A(t,t_0)^{-1}x(t)$ et dériver ...

ED linéaires périodiques (cf TD)

$$x'(t) = A(t)x(t) \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $A(\cdot)$ T-périodique, c-a-d $A(t+T) = A(t)$ $\forall t$

Propriété de la résolvante

$$R_A(t+T, s+T) = R_A(t,s)$$

Conséquence

Comportement de $x(t)$ quand $t \to +\infty$

$\Longleftrightarrow$

celui de $R_A(T,0)^N x(0)$ quand $N \to +\infty$

$\longrightarrow$ dépend du module des valeurs propres de $R_A(T,0)$ (cf. TD)